

Problème

Les 4 premières questions de I sont en fait des rappels de cours, traités dans de nombreux manuels.

Dans tout le problème,  $E$  est un espace vectoriel euclidien de dimension  $n$ , dont le produit scalaire est noté  $(,)$ . Si  $H$  est une partie de  $E$ , on définit  $H^\perp$  par :

$$H^\perp = \{x \in E, \forall h \in H, (x, h) = 0\}$$

On désigne par  $GL(E)$  le groupe, pour la composition des applications, des applications linéaires bijectives de  $E$  sur  $E$ , et par  $O(E)$  le sous-groupe de  $GL(E)$  constitué des isométries :

$$O(E) = \{f \in GL(E), \forall (x, y) \in E \times E, (x, y) = (f(x), f(y))\}$$

$O^+(E)$  est le groupe des déplacements de  $E$  :

$$O^+(E) = \{f \in O(E), \det f = 1\} \text{ (où } \det f = \text{déterminant de } f\text{)}.$$

Si  $H$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ , on désigne par  $\sigma_H$  la symétrie orthogonale par rapport à  $H$ .  $\sigma_H$  est un élément de  $O(E)$ .

Si  $H$  est de codimension deux (c'est-à-dire de dimension  $n - 2$ ), on dit que  $\sigma_H$  est un retournement.

I. 1. Prouver que  $O^+(E)$  est un sous-groupe distingué de  $O(E)$  [c'est-à-dire que :  $\forall g \in O(E), \forall f \in O^+(E), g \circ f \circ g^{-1} \in O^+(E)$ ]

2. Prouver que tout retournement appartient à  $O^+(E)$ .

Que peut-on dire de  $\sigma_H$  si  $H$  est un hyperplan de  $E$  ?

3. Soient  $H_1$  et  $H_2$  deux hyperplans de  $E$  tels que  $H_1^\perp \subset H_2$ .

Prouver que  $H_2^\perp \subset H_1$ , que  $\sigma_{H_1} \circ \sigma_{H_2} = \sigma_{H_2} \circ \sigma_{H_1}$ , et que cette isométrie est un retournement que l'on décrira.

4. Soit  $f$  un déplacement de  $E$ . Prouver qu'il existe des sous-espaces  $E_0 = \text{Ker}(f - \text{Id})$ ,  $E_1, \dots, E_q$ , deux à deux orthogonaux, stables par  $f$ , et tels que :

$$\begin{cases} i > 0 \Rightarrow \dim E_i = 2 \text{ et } f|_{E_i} \text{ est une rotation.} \\ E = E_0 \oplus E_1 \oplus \dots \oplus E_q \end{cases}$$

[On pourra utiliser la diagonalisation des matrices carrées unitaires :

$A^{-1} = \overline{A}^t$ ]. On note  $s = \dim(\text{Ker}(f - \text{Id}))$ . Exprimer  $q$  à l'aide de  $s$  et  $n$ .

On pourra admettre cette question et traiter la suite du problème.

5. On suppose  $n \geq 3$ . Avec les notations de 4), on définit pour tout  $i (1 \leq i \leq q)$  un élément  $u_i$  de  $GL(E)$  par les formules :

$$u_i|_{E_i} = f|_{E_i} \quad (\text{restrictions}), \quad u_i|_{E_i^\perp} = \text{Id}.$$

- a) Prouver que  $u_i$  est un déplacement de  $E$ , et qu'il existe deux droites  $D_i$  et  $D'_i$  de  $E_i$  telles que :

$$u_i = \sigma_{H_i} \circ \sigma_{H'_i}$$

où on a posé :  $H_i = D_i \oplus E_i^\perp$ ,  $H'_i = D'_i \oplus E_i^\perp$ .

Dans b) c) d) suivants, on suppose  $n - s > 2$ .

- b) Prouver que :

$$\forall i, j \quad 1 \leq i, j \leq q, \quad H_i^\perp \subset H_j \cap H'_j.$$

- c) Prouver que :  $f = \sigma_{H_1} \circ \sigma_{H'_1} \circ \dots \circ \sigma_{H_q} \circ \sigma_{H'_q}$

- d) Utiliser 5. c), 5. b) et 3. pour prouver que  $f$  est le produit de  $q$  retournements.

6. En utilisant l'égalité :  $(A + B)^\perp = A^\perp \cap B^\perp$  valable pour deux sous-espaces vectoriels  $A$  et  $B$  de  $E$ , prouver que la dimension de l'espace vectoriel des points fixes d'un produit de  $k$  retournements est supérieure ou égale à  $n - 2k$ .

En déduire que si  $q \geq 2$ ,  $f$  s'exprime comme produit de  $q$  retournements mais pas comme produit de  $k$  retournements avec  $k < q$ .

7. Prouver que si  $q = 1$ ,  $f$  est un retournement ou le produit de deux retournements.

II. Dans cette partie,  $n = 3$ .  $G$  est un sous-groupe distingué de  $O^+(E)$  :

$$\forall f \in O^+(E), \quad \forall g \in G, \quad f \circ g \circ f^{-1} \in G.$$

On suppose  $G \neq \{\text{Id}\}$ .

- 1) Décrire  $f \circ g \circ f^{-1}$  si  $g = \sigma_D$  (où  $D$  est une droite).

- 2) En utilisant la partie I, prouver que si  $G$  contient un retournement, alors  $G = O^+(E)$ .
- 3) Soit  $g \in G - \{Id\}$ ,  $g$  n'étant pas un retournement. En utilisant les puissances de  $g$  ( $g^2 = g \circ g$ ,  $g^{n+1} = g^n \circ g$ ), prouver que  $G$  contient une rotation  $r$  dont l'angle appartient à  $] \Pi/2 ; \Pi [$ .
- 4) Prouver qu'il existe une droite  $D$  telle que  $D$  et  $r(D)$  soient orthogonales. [On pourra utiliser des coordonnées, et un argument de continuité.]
- 5) Soit  $f = \sigma_D$ . Prouver que :  $h = f \circ f^{-1} \circ r^{-1}$  est un élément de  $G$ , et que c'est un retournement. Peut-on préciser la position de son axe par rapport à  $r(D)$  ?
- 6) Quels sont les sous-groupes distingués de  $O^+(E)$  ?

III. Dans cette partie, à partir de la question 2), on suppose  $n \geq 5$ .  $G$  est un sous-groupe distingué non réduit à  $\{\pm Id\}$  de  $O^+(E)$ .

- 1) Soit  $Z$  le centre de  $O(E)$  :  $Z = \{f \in O(E), \forall g \in O(E), f \circ g = g \circ f\}$ .  
Soit  $Z^+$  le centre de  $O^+(E)$  :  $Z^+ = \{f \in O^+(E), \forall g \in O^+(E), f \circ g = g \circ f\}$ .
  - a) Prouver que si  $f$  est une isométrie conservant globalement toute droite de  $E$ , alors  $f \in \{\pm Id\}$ .
  - b) Déterminer  $Z$  et  $Z^+$  (on pourra utiliser  $\sigma_H$  où  $H$  est un hyperplan, puis un espace de codimension 2).
- 2) Soit  $g \in G$ ,  $g \notin \{\pm Id\}$ . Prouver qu'il existe un plan  $P$  (espace de dimension 2) tel que  $P \neq g(P)$ . On pose  $S = P + g(P)$ . Quelle est la dimension de  $S^\perp$  ?  
On pose  $h = \sigma_{P^\perp}$ , et  $k = h \circ g \circ h^{-1} \circ g^{-1}$ .
- 3) Exprimer  $k$  comme produit de deux retournements.  
Prouver que  $k$  est dans  $G$ , et que  $k$  laisse stable  $S^\perp$ .  
Que vaut la restriction  $k|_{S^\perp}$  ?
- 4) Soit  $x \in S^\perp \setminus \{0\}$  et  $y$  tel que  $z = k(y) \neq \pm y$ 
  - a) Prouver que  $\ell = \sigma_{y^\perp} \circ \sigma_{x^\perp}$  est un déplacement, et que  $r = k \circ \ell \circ k^{-1} \circ \ell^{-1}$  est dans  $G$ .

- b) Prouver que  $k \circ \sigma_x^\perp = \sigma_x^\perp \circ k$ , puis que  $r = \sigma_z^\perp \circ \sigma_y^\perp$ .
5. Prouver qu'il existe un sous-espace  $V$  de  $E$  de codimension 3 stable par  $r$ , tel que  $r|_V = \text{Id}|_V$ .
6. Dédurre de III. 5. et de II que  $G$  contient un retournement.
7. Quels sont les sous-groupes distingués de  $O^+(E)$ .

Remarque. Le cas  $n=4$  n'est pas étudié ici. Il nécessite l'utilisation des quaternions.

---

Solution :

**I.1**  $\mathcal{O}^+$  est un sous-groupe de  $\mathcal{O}$  car non vide ( $\text{Id} \in \mathcal{O}^+$ ) et vérifiant :

$$\forall f, g \in \mathcal{O}^+ \quad \det(fg^{-1}) = \det f \cdot (\det g)^{-1} = 1 \Rightarrow fg^{-1} \in \mathcal{O}^+$$

De plus :  $\forall f \in \mathcal{O}^+ \forall g \in \mathcal{O} \quad \det gfg^{-1} = \det g \cdot \det f \cdot (\det g)^{-1} = \det f = 1 \Rightarrow gfg^{-1} \in \mathcal{O}^+$   
montre que  $\boxed{\mathcal{O}^+ \triangleleft \mathcal{O}}$

NB : Plus rapidement,  $\mathcal{O}^+$  est le noyau du morphisme de groupes :

$$\begin{aligned} (\mathcal{O}, \circ) &\longrightarrow (\{\pm 1\}, \times) \\ f &\longmapsto \det f \end{aligned}$$

**I.2** \* Si  $\sigma_H$  est un retournement,  $\dim H = n-2$  et la matrice de  $\sigma_H$  dans la orthonormale base  $e = (e_1, \dots, e_n)$  où  $(e_1, e_2)$  base de  $H^\perp$  et  $(e_3, \dots, e_n)$  base de  $H$  est :

$$\text{Mat}(\sigma_H; e) = \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{donc } \det \text{Mat}(\sigma_H; e) = 1 \Rightarrow \sigma_H \in \mathcal{O}^+$$

\* Si  $H$  est un hyperplan, le même raisonnement donne  $\text{Mat}(\sigma_H; e) = \begin{pmatrix} -1 & & \\ & 1 & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$

$$\text{donc } \det \sigma_H = -1 \Rightarrow \sigma_H \in \mathcal{O}^- \doteq \mathcal{O} \setminus \mathcal{O}^+.$$

$\sigma_H$  est une symétrie hyperplane.

**I.3** \*  $H_1^\perp \subset H_2 \Leftrightarrow H_1^\perp \supset H_2^\perp \Leftrightarrow H_1 \supset H_2^\perp$

On dit que  $H_1$  et  $H_2$  sont perpendiculaires si  $H_1^\perp \subset H_2$  (ie  $H_2^\perp \subset H_1$ ).

NB : De même, on dira que les s.e.v  $H_1$  et  $H_2$  sont orthogonaux si  $H_1 \subset H_2^\perp$  (ou encore :  $H_2 \subset H_1^\perp$ ). (Ramis II.2.1.3.5/p 55)

\*  $H_1 \neq H_2$  (car  $H_1^\perp \subset H_2$ ), donc

$$F = H_1 \cap H_2 \text{ sera de dimension } n-2$$

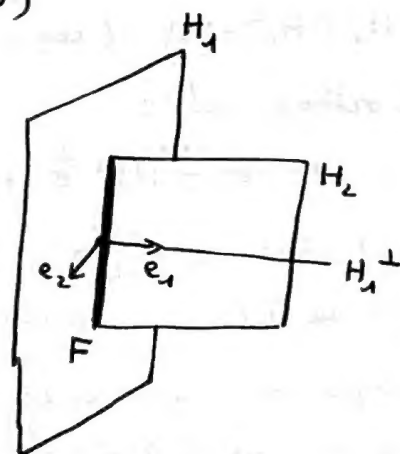
$$(\dim H_1 \cap H_2 = \underbrace{\dim H_1}_{n-1} + \underbrace{\dim H_2}_{n-2} - \underbrace{\dim(H_1 + H_2)}_n = n-2)$$

$$E = H_1^\perp \oplus H_1$$

et  $H_1 = H_2^\perp \oplus (H_1 \cap H_2)$  car  $H_2^\perp$  et  $H_1 \cap H_2$  sont inclus dans  $H_1$ , d'intersection réduite à 0, et de dimensions respectives 1 et  $n-2$ .

Par suite :

⊗ On peut conclure ainsi :  $H_1^\perp + H_2^\perp = H_1^\perp \oplus H_2^\perp$  (car si  $x \in H_1^\perp \cap H_2^\perp$ , comme  $H_1^\perp \subset H_2$ ,  $x=0$ ) puis  $(H_1^\perp \oplus H_2^\perp)^\perp = H_1 \cap H_2 \Rightarrow E = H_1^\perp \oplus H_2^\perp \oplus (H_1 \cap H_2)$   
enchaîner page suiv.



$$E = H_1^\perp \oplus H_2^\perp \oplus (H_1 \cap H_2)$$

On choisit une base orthonormale  $(e_1, \dots, e_n)$  adaptée au problème ie :

$$\begin{aligned} (e_1) & \text{ base orthonormale de } H_1^\perp \\ (e_2) & \quad \quad \quad \quad \quad \quad H_2^\perp \\ (e_3, \dots, e_n) & \quad \quad \quad \text{de } H_1 \cap H_2 = F \end{aligned}$$

et il suffit d'expliciter les matrices de  $\sigma_{H_1}$  et  $\sigma_{H_2}$  dans  $e = (e_1, \dots, e_n)$  pour conclure :

$$M_1 = \text{Mat}(\sigma_{H_1}; e) = \begin{pmatrix} -1 & & \\ & 1 & \\ & & \ddots \\ 0 & & & -1 \end{pmatrix}$$

$$M_2 = \text{Mat}(\sigma_{H_2}; e) = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & \ddots \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{d'où } M_1 M_2 = M_2 M_1 = \begin{pmatrix} -1 & & \\ & -1 & \\ & & \ddots \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix} = \text{Mat}(\sigma_F; e)$$

On aura bien :  $\sigma_{H_1} \circ \sigma_{H_2} = \sigma_{H_2} \circ \sigma_{H_1} = \sigma_F$  où  $\sigma_F$  est le retournement par rapport à  $F = H_1 \cap H_2$ .

NB : Le résultat subsiste même si  $H_1$  et  $H_2$  ne sont plus des hyperplans.

(Ramis II 2.3.1.2° p 60). Montrons que "Si  $H_1$  et  $H_2$  sont 2 sous-espaces perpendiculaires de  $E$ , alors  $\sigma_{H_1} \circ \sigma_{H_2} = \sigma_{H_2} \circ \sigma_{H_1} = \sigma_{H_1 \cap H_2}$ ".

$$F = H_1 \cap H_2 = (H_1^\perp + H_2^\perp)^\perp \quad (\text{d'après la relation générale } (V \cap W)^\perp = V^\perp + W^\perp \quad \square)$$

De plus  $H_1^\perp \cap H_2^\perp = \{0\}$  (car  $H_1^\perp \cap H_2^\perp \subset H_2 \cap H_1 = \{0\}$ ), d'où la somme directe orthogonale :

$$E = H_1^\perp \oplus H_2^\perp \oplus (H_1 \cap H_2)$$

On constate que  $\sigma_{H_1} \circ \sigma_{H_2}$  et  $\sigma_{H_2} \circ \sigma_{H_1}$  transforment tout  $x$  de  $H_1^\perp$  ou  $H_2^\perp$  en son opposé, et tout  $x$  de  $H_1 \cap H_2$  en lui-même. D'où  $\sigma_{H_1} \circ \sigma_{H_2} = \sigma_{H_2} \circ \sigma_{H_1} = \sigma_{H_1 \cap H_2}$ .

On aurait pu conclure en écrivant les matrices de  $\sigma_{H_1}$  et  $\sigma_{H_2}$ , soient  $M_1$  et  $M_2$ , dans la base  $e$  obtenue en juxtaposant des bases orthonormales de  $H_1^\perp$ , de  $H_2^\perp$  et de  $H_1 \cap H_2$  :

$$M_1 = \begin{pmatrix} -I & & \\ & I & \\ & & I \end{pmatrix} \quad M_2 = \begin{pmatrix} I & & \\ & -I & \\ & & I \end{pmatrix} \quad \text{d'où } M_1 M_2 = M_2 M_1 = \begin{pmatrix} -I & & \\ & -I & \\ 0 & & I \end{pmatrix} = \text{Mat}(\sigma_{H_1 \cap H_2}; e)$$

CQFD



**I4** Soit  $f \in \mathcal{O}(E)$ . On va montrer le résultat de cours suivant : "Il existe une  
b.o.  $e$  dans laquelle  $\text{Mat}(f; e) = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & -1 \end{pmatrix} \oplus S_{\theta_1} \oplus \dots \oplus S_{\theta_p}$  " où  $S_{\theta} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$  en

utilisant le Th. de diagonalisation d'un opérateur unitaire (Ramis II 4.2.1 et 4.2.2 p 111).  
 (La preuve directe est donnée en Ramis II.2.3.5 p 72). (T espaces hermitiens)

$f: E \rightarrow \mathbb{C}^n$  est un morphisme injectif de  $\mathbb{R}$ -e.v.

$$x = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n \mapsto \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

$\mathbb{C}^n$  est muni du produit scalaire hermitien  $\left( \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda'_1 \\ \vdots \\ \lambda'_n \end{pmatrix} \right) = \sum \bar{\lambda}_i \lambda'_i$ .

La matrice  $A$  de  $f$  dans la b.o.  $e$  est orthogonale ( ${}^t A = A^{-1}$ ) réelle, donc unitaire ( ${}^t \bar{A} = A^{-1}$ ) si on la considère comme une matrice à coefficients dans  $\mathbb{C}$ .

C'est donc la matrice d'un endomorphisme unitaire  $\tilde{f}$  de  $\mathbb{C}^n$  et :

\* Toutes les valeurs propres de  $A$  sont de module 1 : Si  $x$  est un vecteur propre associé à  $\lambda$ ,  $\|u(x)\|^2 = \|x\|^2 \Rightarrow |\lambda|^2 \|x\|^2 = \|x\|^2 \Rightarrow |\lambda| = 1$

\* Si  $\lambda$  et  $\mu$  sont 2 v.p. distinctes de  $\tilde{f}$ , les o.e.v. propres  $E(\lambda)$  et  $E(\mu)$  sont orthogonaux :

En effet, si  $x \in E(\lambda)$  et  $y \in E(\mu)$  ( $f(x) = \lambda x$ ), et  $f(y) = \mu y \Leftrightarrow y = \mu f^{-1}(y)$

donc  $(f(x), y) = (x, f^{-1}(y)) = \frac{1}{\mu} (x, y) = \bar{\mu} (x, y)$ , finalement  $\bar{\lambda} (x, y) = \bar{\mu} (x, y) \Rightarrow (x, y) = 0$ .

\*  $A$  est diagonalisable dans une b.o. de  $\mathbb{C}^n$  (Ramis II 4.2.2 déjà cité)

\*  $A$  étant réelle,  $\chi_A(X) = \det(A - XI) \in \mathbb{R}[X]$  donc si  $\lambda$  est une v.p. de  $A$  de multiplicité  $k$ ,  $\bar{\lambda}$  sera une v.p. de  $A$  de multiplicité  $k$ .

On peut donc exhiber une b.o.  $e' = (\underbrace{e'_1, \dots, e'_p}_{\text{vecteurs propres associés à } 1}, \underbrace{e'_{p+1}, \dots, e'_{p+k}}_{\text{vect. propres associés à } -1}, \underbrace{e'_{p+k+1}, \dots, e'_n}_{\text{vect. propres associés à } \lambda \notin \mathbb{R}})$

1) On peut supposer que  $e'_1, \dots, e'_{p+k}$  sont des vecteurs réels (ie à coordonnées réelles) :

En effet, si  $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$  et si  $\lambda$  est une v.p. réelle de  $A$ , le o.e.v. propre  $E(\lambda)$  peut être considéré comme un  $\mathbb{R}$ -e.v. de  $\mathbb{R}^n$  ou un  $\mathbb{C}$ -e.v. de  $\mathbb{C}^n$ . Notons le  $E_{\mathbb{R}}(\lambda)$  ou  $E_{\mathbb{C}}(\lambda)$  suivant le cas. Si  $e = (e_1, \dots, e_n)$  est une base de  $E_{\mathbb{R}}(\lambda)$ , alors c'est aussi une base de  $E_{\mathbb{C}}(\lambda)$

puisque  $e_1, \dots, e_n$  sont toujours dans  $E_{\mathbb{C}}(\lambda)$ , et si  $x \in E_{\mathbb{C}}(\lambda)$   $x \in \mathbb{C}^n$  et  $A(x) = \lambda x$

$\Rightarrow A(\bar{x}) = \lambda \bar{x} \Rightarrow \bar{x} \in E_{\mathbb{C}}(\lambda)$ , d'où  $\frac{x+\bar{x}}{2}$  et  $\frac{x-\bar{x}}{2i}$  dans  $E_{\mathbb{R}}(\lambda)$ , donc s'expriment

comme comb. lin. à coeff. réels de  $e_1, \dots, e_n$ . Donc  $x = \frac{x+\bar{x}}{2} + i \frac{x-\bar{x}}{2i} \in \text{Vect}_{\mathbb{C}}(e_1, \dots, e_n)$

et  $e$  est bien une base de  $E_{\mathbb{C}}(\lambda)$  formée de vecteurs réels.  $\square$

2) Vecteurs  $e'_{p+1}, \dots, e'_n$  : On les associe 2 à 2 de sorte que :

$$(e'_j, e'_{j+1}) \quad e'_j \in E(\lambda) \quad e'_{j+1} = \bar{e}'_j \in E(\bar{\lambda})$$

car  $x \in E(\lambda) \Leftrightarrow Ax = \lambda x \Leftrightarrow A\bar{x} = \bar{\lambda}\bar{x} \Leftrightarrow \bar{x} \in E(\bar{\lambda})$  montre que si  $\lambda$  est v.p.,  $\bar{\lambda}$  l'est aussi et  $\overline{E(\lambda)} = E(\bar{\lambda})$ .

Enfin, dans chaque sev  $E_j$  de base orthonormale  $(e'_j, e'_{j+1})$  on préfère la base

$$(E_j, E_{j+1}) = \left( \frac{e'_j + e'_{j+1}}{\sqrt{2}}, \frac{e'_j - e'_{j+1}}{i\sqrt{2}} \right) \text{ qui a le mérite d'être orthonormale } (\|E_j\|^2 = \left| \frac{1}{i\sqrt{2}} \right|^2 + \left| \frac{1}{i\sqrt{2}} \right|^2 = 1 \dots) \text{ et formée de vecteurs réels (car } e'_{j+1} = \bar{e}'_j).$$

Notons  $\lambda = e^{i\theta}$  et  $\bar{\lambda} = e^{-i\theta}$  les v.p. associées à  $e'_j$  et  $e'_{j+1}$ . La matrice représentant  $\tilde{\beta}|_{E_j}$  dans la n<sup>elle</sup> base  $(E_j, E_{j+1})$  sera :

$$B_j = P^{-1} \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix} P = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} = S_{-\theta} \quad \text{puisque } P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{i\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{i\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

Ccl : Il existe une b.o.  $e'' = (e'_1, \dots, e'_{p+1}, e'_{p+1}, \dots, e'_n)$  de  $\mathbb{C}^n$ , formée de vecteurs réels or telle que :

$$M \doteq \text{Mat}(\tilde{\beta}; e'') = \begin{pmatrix} \boxed{1} & & & \\ & \ddots & & \\ & & \boxed{S_{-\theta_1}} & \\ & & & \ddots \\ & & & & \boxed{S_{-\theta_q}} \end{pmatrix}$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_p \quad \underbrace{\hspace{10em}}_{2q}$

Il existe donc  $P$  unitaire telle que  $M = P^{-1}AP$ . Pour la matrice de passage de la base canonique de  $\mathbb{C}^n$  vers  $e''$ , qui est formée de vecteurs réels. Pour donc à coefficients réels : elle est donc orthogonale.

||  $M$  représentera bien la matrice de  $\beta$  dans une b.o de  $E$ .

Dans notre problème,  $\beta$  est un déplacement donc la multiplicité de la v.p.  $-1$  sera paire. On pourra associer les vecteurs de la b.o. de  $\text{Ker}(\beta + \text{Id})$  2 par 2 pour définir des rotations (en fait  $-\text{Id}$ ) sur chacun des plans ainsi construits.

Finalement :

$$\begin{aligned} & \forall \beta \in \mathcal{O}^+(E) \quad \exists E_0 = \text{Ker}(\beta - \text{Id}), E_1, \dots, E_q \quad \text{plans orthogonaux, stables par } \beta \\ & \text{tel que } \forall i \in \mathbb{N}_q \quad \beta|_{E_i} \text{ est une rotation et } E = E_0 \oplus \dots \oplus E_q \end{aligned}$$

Si  $s = \dim \text{Ker}(\beta - \text{Id})$ , on aura  $s + 2q = n$  d'où  $\boxed{q = \frac{n-s}{2}}$



**I.5.a** \*  $u_i|_{E_i}$  est une rotation plane et  $u_i|_{E_i^\perp} = \text{Id}_{E_i^\perp}$ . Comme  $E = E_i \oplus E_i^\perp$

$u_i$  sera une application orthogonale. La matrice de  $f$  étant

$$M = \begin{pmatrix} I_p & & 0 \\ & S_{\theta_1} & \\ 0 & & S_{\theta_q} \end{pmatrix} \quad \text{où } S_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad \text{et } I_p = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

celle de  $u_i$  sera :  $\text{Mat}(u_i; e) = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & S_{\theta_i} & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}$

dans une base orthonormale  $e$  convenable, d'où  $\det u_i = \det S_{\theta_i} = 1 \Rightarrow u_i \in O^+(E)$

\*  $u_i|_{E_i} = \beta|_{E_i}$  est une rotation plane, donc s'écrit comme composée de 2 symétries  $s_{D_i}$  et  $s_{D'_i}$  par rapport à des droites :

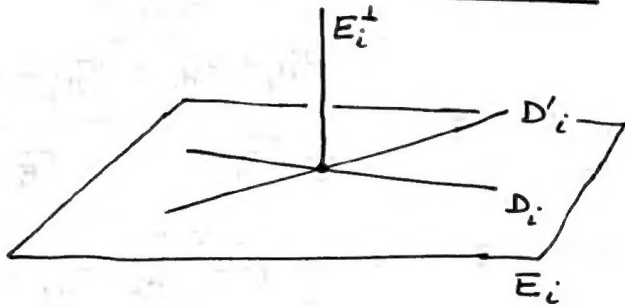
$$u_i|_{E_i} = s_{D_i} \circ s_{D'_i}$$

$$\text{Prenons } \begin{cases} H_i = D_i \oplus E_i^\perp \\ H'_i = D'_i \oplus E_i^\perp \end{cases}$$

$H_i$  et  $H'_i$  sont des hyperplans et  $u_i = \sigma_{H_i} \circ \sigma_{H'_i}$

(car  $x \in E_i^\perp \Rightarrow \sigma_{H_i} \circ \sigma_{H'_i}(x) = x$  et  $u_i(x) = x$ )

$x \in E_i \Rightarrow \sigma_{H_i} \circ \sigma_{H'_i}(x) = s_{D_i} \circ s_{D'_i}(x) = u_i|_{E_i}(x) = u_i(x)$  puisque  $\sigma_{H_i}|_{E_i} = s_{D_i} \dots$ )



### I.5.b

$H_j \cap H'_j = (D_j \oplus E_j^\perp) \cap (D'_j \oplus E_j^\perp) \supset E_j^\perp$  et  $\dim H_j \cap H'_j = \dim H_j + \dim H'_j - \dim(H_j + H'_j) = (n-1) + (n-1) - n = n-2$  car  $H_j \neq H'_j$  (sinon  $D_j = D'_j$  d'où  $u|_{E_j} = s_{D_j} \circ s_{D_j} = \text{Id}$  impossible d'après le choix de I.4). De  $\dim E_j^\perp = n - \dim E_j = n-2$  on déduit :

$$\boxed{H_j \cap H'_j = E_j^\perp} \quad (*)$$

Cela étant :  $H_i^\perp \subset H_j \cap H'_j = E_j^\perp \Leftrightarrow E_j \subset H_i$  ce qui est vrai

puisque  $E_j \subset E_i^\perp \subset D_i \oplus E_i^\perp = H_i$ .

CQFD

(\*) Autre preuve :  $x \in H_j \cap H'_j \Rightarrow x = x_1 + x_2 = x'_1 + x'_2$  avec  $x_1 \in D_j$ ,  $x_2 \in E_j^\perp$ ,  $x'_1 \in D'_j$ ,  $x'_2 \in E_j^\perp$   
 $\Rightarrow x_1 - x'_1 = x'_2 - x_2 \in E_j^\perp \cap E_j = \{0\} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = x'_1 \in D_j \cap D'_j = \{0\} \\ x_2 = x'_2 \end{cases}$  car  $D_j \neq D'_j$  dans  $E_j$  (sinon  $\beta|_{E_j} = \text{Id}_{E_j}$  à rejeter)

Donc  $x = x_2 \in E_j^\perp$ , et  $H_j \cap H'_j \subset E_j^\perp$ . L'inclusion inverse est triviale.

On a  $\beta = u_1 \circ u_2 \circ \dots \circ u_q$  car  $\forall i \in \{1, \dots, q\} \quad \forall x \in E: u_1 \circ \dots \circ u_q(x) = u_i(x) = f(x)$   
(en effet  $u_j(x) = x$  dès que  $j \neq i$ ).

I.5.a entraîne bien:  $\beta = \sigma_{H_1} \circ \sigma_{H'_1} \circ \dots \circ \sigma_{H_q} \circ \sigma_{H'_q}$

**I.5.d** Soit  $n-s > 2$ , ie  $q > 1$ .

De  $H_i^\perp \subset H_j \cap H'_j$  on déduit (I.3) que  $\sigma_{H_i}$  commute avec  $\sigma_{H_j}$  et  $\sigma_{H'_j}$ . donc:

$$\beta = \underbrace{\sigma_{H_1} \circ \sigma_{H_2}}_{\sigma_{F_1}} \overset{\text{on permute}}{\circ} \underbrace{\sigma_{H'_1} \circ \sigma_{H'_2}}_{\sigma_{F_2}} \circ \dots \circ \underbrace{\sigma_{H_{q-1}} \circ \sigma_{H_q}}_{\sigma_{F_{q-1}}} \circ \underbrace{\sigma_{H'_{q-1}} \circ \sigma_{H'_q}}_{\sigma_{F_q}} \quad (*)$$

I.3 entraîne que  $\sigma_{H_i} \circ \sigma_{H_j} = \sigma_{H_i \cap H_j}$  = retournement de base  $H_i \cap H_j$ .

On aura aussi  $\sigma_{H'_i} \circ \sigma_{H'_j} = \sigma_{H'_i \cap H'_j}$  d'après I.3 puisque le même raisonnement qu'au I.5.b montre que  $H_i^\perp \subset H_j \cap H'_j$ .

Conclusion:  $\beta = \sigma_{F_1} \circ \dots \circ \sigma_{F_q}$  est le produit de  $q = \frac{n-s}{2}$  retournements  
dès que  $n-s > 2$ .  
 ~~$\beta = \text{Id}_E$  sera produit de 2 retournements. Ainsi  $\mathcal{O}^+(E)$  est engendré par l'ensemble de retournements de  $E$  dès que  $\dim E = n \geq 3$ .~~

NB: Si  $n-s = 2$ , le résultat n'est plus assuré. Penser au contre-exemple:  
 $n=3$ ,  $\beta$  = rotation vect. d'axe  $\Delta$ ,  $s=1$  et  $\beta$  n'est pas la composée de  $\frac{n-s}{2} = 1$  retournement en général! Cela provient de (\*) où nous avons besoin de 4 symétries hyperplanes au moins pour pouvoir les permuter et conclure.

**I.6**

\* Si  $\beta = \sigma_{F_1} \circ \dots \circ \sigma_{F_k}$  est le produit de  $k$  retournements,  $F_1 \cap \dots \cap F_k \subset \text{Ker}(\beta - \text{Id})$  entraîne  $\dim(F_1 \cap \dots \cap F_k) \leq \dim \text{Ker}(\beta - \text{Id})$ .

Notons  $F_i = G_i^\perp$  où  $\dim F_i = n-2$  et  $\dim G_i = 2$ .

$$F_1 \cap \dots \cap F_k = G_1^\perp \cap \dots \cap G_k^\perp = (\underbrace{G_1 + \dots + G_k}_{\dim \leq 2k})^\perp \text{ sera de dimension } \geq n-2k.$$

Par suite  $\boxed{n-2k \leq \dim F_1 \cap \dots \cap F_k \leq \dim \text{Ker}(\beta - \text{Id})}$

\* Si  $q \geq 2 \Leftrightarrow n-s > 2$ , I.S. d a montré que  $\beta = \sigma_{F_1} \circ \dots \circ \sigma_{F_q}$  où  $\dim F_i = n-2$ ,  $q = \frac{n-s}{2}$  et  $s = \dim \text{Ker}(\beta - \text{Id})$ .

Soit  $\beta = \sigma_{G_1} \circ \dots \circ \sigma_{G_k}$  une autre décomposition de  $\beta$  en produit de retournements.

Alors:  $\dim \text{Ker}(\beta - \text{Id}) = s \geq n-2k \Rightarrow n-2q \geq n-2k \Rightarrow k \geq q$ .

$\beta = \sigma_{F_1} \circ \dots \circ \sigma_{F_q}$  est donc une décomposition minimale de  $\beta$  en produit de retournement dès que  $n-s > 2$ .

**I.7** Si  $q=1 \Leftrightarrow n-s=2$ , 2 cas sont possibles:

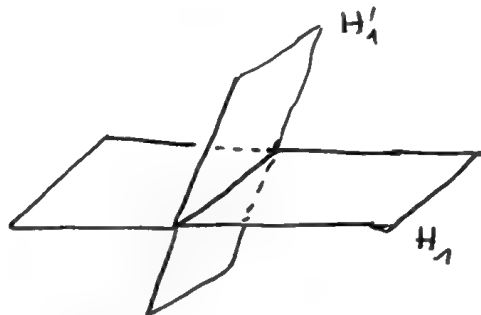
1) Si  $\text{Mat}(\beta; e) = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ & & \boxed{\begin{smallmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}} \end{pmatrix}$ ,  $\beta$  est un retournement de base  $E_1$ .

$\begin{matrix} \longleftrightarrow & \longleftrightarrow \\ E_0 & E_1 \end{matrix}$

2) Si  $\text{Mat}(\beta; e) = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ & & \boxed{S_0} \end{pmatrix}$  où  $S_0 \neq \pm I$ ,  $\beta = \gamma_1 = \sigma_{H_1} \circ \sigma_{H'_1}$  d'après I.5.

$H_1 \neq H'_1$  (sinon  $\beta = \text{Id}$  et  $n-s=0$ ) et il existe un hyperplan  $H$  perpendiculaire à  $H_1$  et  $H'_1$  ( $H$  contenant les droites  $H_1^\perp$  et  $H'_1{}^\perp$ ), de sorte que:

$$\beta = \sigma_{H_1} \circ \sigma_H \circ \sigma_H \circ \sigma_{H'_1} = \sigma_{H_1 \cap H} \circ \sigma_{H \cap H'_1} \text{ d'après I.3.}$$



Ccl:  $\mathcal{O}^+(E)$  est engendré par l'ensemble des retournements et, dans chaque cas ( $n-s=2$  ou  $n-s>2$ ) nous avons exhibé des décompositions minimales.

**II.1**  $\det \beta \sigma_D \beta^{-1} = \det \sigma_D = 1$  donc  $\beta \sigma_D \beta^{-1} \in \mathcal{O}^+(E)$ .

Comme  $\beta \sigma_D \beta^{-1} \neq \text{Id}$  (sinon  $\sigma_D = \text{Id}$ ),  $\beta \sigma_D \beta^{-1}$  sera une rotation d'axe et d'angle à déterminer.

$$\beta \sigma_D \beta^{-1}(x) = x \Leftrightarrow \sigma_D \beta^{-1}(x) = \beta^{-1}(x) \Leftrightarrow \beta^{-1}(x) \in D \Leftrightarrow x \in \beta(D)$$

d'axe est  $\beta(D)$ . On prouve ensuite que  $\forall y \in \beta(D)^\perp$ ,  $\beta \sigma_D \beta^{-1}(y) = -y$  comme dans la 2<sup>esol.</sup> qui suit.

~~Enfin, pour tout  $x \in \beta(D)^\perp$ ,  $(x | \beta \sigma_D \beta^{-1} x) = (\beta^{-1} x | \sigma_D \beta^{-1} x) = (\beta^{-1} x | -\beta^{-1} x) = -\|\beta^{-1} x\|^2 = -\|x\|^2$~~   
~~donc  $\cos(x, \beta \sigma_D \beta^{-1} x) = -1 \Rightarrow \beta \sigma_D \beta^{-1} x = -x$~~   
 ~~$\beta \sigma_D \beta^{-1}$  sera le retournement d'axe  $\beta(D)$  :  $\boxed{\beta \sigma_D \beta^{-1} = \sigma_{\beta(D)}}$~~

2<sup>esol.</sup>:  $E = \beta(D) \oplus \beta(D)^\perp$ . Soit  $x = y + z$  où  $y = \beta(d) \in \beta(D)$  et  $z \in \beta(D)^\perp$ .

$$\text{On a : } \beta \sigma_D \beta^{-1}(x) = \beta(d) + \beta \sigma_D \beta^{-1}(z) = y + \beta \sigma_D \beta^{-1}(z)$$

$\beta$  est une isométrie, donc  $\beta(V^\perp) = \beta(V)^\perp$  pour tout sous  $V$  (car  $x \in \beta(V^\perp) \Leftrightarrow \exists y \in V^\perp$   $x = \beta(y) \Leftrightarrow \beta^{-1}(x).z = 0 \forall z \in V \Leftrightarrow x.z = 0 \forall z \in V \Leftrightarrow x \in \beta(V)^\perp$ ).

$$\text{Ici } z \in \beta(D)^\perp = \beta(D^\perp) \Rightarrow \beta^{-1}(z) \in D^\perp \Rightarrow \beta \sigma_D \beta^{-1}(z) = -z.$$

$$\text{On en déduit : } \beta \sigma_D \beta^{-1}(x) = y - z$$

ie  $\beta \sigma_D \beta^{-1}$  est le retournement d'axe  $\beta(D)$ .

**II.2** Si  $G$  contient un retournement <sup>d'axe  $D$</sup> , il contiendra tous les retournements d'axe  $\beta(D)$  pour tout  $\beta \in \mathcal{O}^+(E)$  (II.1). Comme toute droite  $D'$  est l'image de  $D$  par une isométrie  $\beta$ ,  $G$  contiendra tous les retournements donc tout  $\mathcal{O}^+(E)$  (puisque les retournements engendrent  $\mathcal{O}^+(E)$ , cf I). Finalement  $\boxed{G = \mathcal{O}^+(E)}$

**II.3** Si  $g \in G \setminus \{\text{Id}\}$  n'est pas un retournement, c'est une rotation d'axe  $D$  et d'angle  $\theta \neq 0 \pmod{\pi}$  (dans  $D^\perp$  orienté arbitrairement). On peut supposer  $\theta \in ]0, 2\pi[$ , puis  $\theta \in ]0, \pi[$  quitte à prendre  $g^{-1}$  au lieu de  $g$ .

\* Si  $\theta \in ]\frac{\pi}{2}, \pi[$ , c'est fini.

\* Si  $\theta = \frac{\pi}{2} \pmod{2\pi}$ ,  $g^2$  sera d'angle  $\pi$  ie un retournement donc  $G = \mathcal{O}^+$  (II.2)

\* Si  $\theta \in ]0, \frac{\pi}{2}[$ ,  $\exists n \in \mathbb{N}^*$   $n\theta \in ]\frac{\pi}{2}, \pi[$  et l'on prend  $r = g^n$  (d'angle  $n\theta$ )

$$(\text{En effet : } \frac{\pi}{2} < n\theta < \pi \Leftrightarrow \frac{\pi}{2\theta} < n < \frac{\pi}{\theta} \Leftrightarrow \frac{\pi}{\theta} - \frac{\pi}{2\theta} = \frac{\pi}{2\theta} > 1)$$

Cel : Dans tous les cas,  $G$  contient une rotation  $r$  d'angle appartenant à  $]\frac{\pi}{2}, \pi[$ .

**II.4**

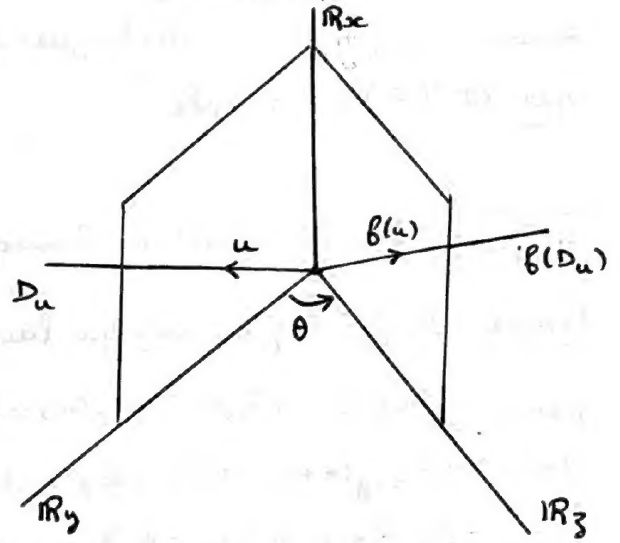
1-solution: Soient  $\mathbb{R}x$  l'axe de  $\beta$ ,  $y \in (\mathbb{R}n)^\perp$  et  $\mathbb{R}z = \mathbb{R}(\beta(y))$ .

Si  $u$  est un vecteur unitaire du plan  $Oxy$  et si  $D_u = \mathbb{R}u$ ,  $\beta(D_u)$  sera la droite dirigée par  $\beta(u)$ .

$\beta(D_u)$  est dans le plan  $Oxz$  et :

$u \mapsto \cos(\widehat{u, \beta(u)})$  définit une fonction continue de  $u$  valant 1 quand  $u = x$  et  $\cos \theta$  pour  $u \in \mathbb{R}y$ .

Comme  $\cos \theta < 0$ , il existera  $u_0 \in \mathbb{R}y \oplus \mathbb{R}n$  tel que  $\cos(u_0, \beta(u_0)) = 0 \Rightarrow D_{u_0} \perp \beta(D_{u_0})$  CQFD



2-solution: La matrice de la rotation  $r$  s'écrit, dans une base orthonormale adéquate :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad \text{où } \theta \in ]\frac{\pi}{2}, \pi[$$

Notons  $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ .  $\vec{u} \perp r(\vec{u}) \Leftrightarrow x^2 + y(y \cos \theta - z \sin \theta) + z(y \sin \theta + z \cos \theta) = 0$   
 $\Leftrightarrow x^2 + (y^2 + z^2) \cos \theta = 0$

Comme  $\cos \theta < 0$ , il suffit de prendre  $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{-\cos \theta} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  pour obtenir un vecteur directeur de  $D$  telle que  $D \perp r(D)$ .

**II.5**  $r \in G \Rightarrow \beta \circ r \beta^{-1} \in G$  et comme  $r^{-1} \in G$ ,  $\beta \circ r \beta^{-1} \circ r^{-1} = h \in G$ .

Notons  $\beta = \sigma_D$ .  $h = \sigma_D \circ r \circ \sigma_D \circ r^{-1} = \sigma_D \sigma_{r(D)}$  d'après II.1

Comme  $D \perp r(D)$ ,  $h = \sigma_D \sigma_{r(D)} = \sigma_{(D+r(D))^\perp}$  est bien un retournement par rapport à une droite orthogonale à  $r(D)$ . ( $h = \sigma_D \sigma_{r(D)}$  est une rotation d'axe  $(D+r(D))^\perp$  et d'angle plat puisque si  $x \in D+r(D)$   $x = y+z$ ,  $y \in D$ ,  $z \in r(D)$  et  $\sigma_D \sigma_{r(D)}(x) = \sigma_D(-y+z) = -y-z = -x$ )

**II.6** Tout sous-groupe distingué  $G$  de  $\mathcal{O}^+(E)$  <sup>distinct de  $\{Id\}$</sup>  contiendra un retournement (II.5) donc sera égal à  $\mathcal{O}^+(E)$ . (II.2)

Les seuls sous-groupes distingués de  $\mathcal{O}^+(E)$  sont donc  $\{Id\}$  et  $\mathcal{O}^+(E)$ . On dit que  $\mathcal{O}^+(E)$  est simple.

**III.1.a** On a le résultat classique :

Lemme : Un endomorphisme  $f$  qui laisse stable toute les dtes vect. est une homothétie vect.

preuve :  $\forall x \in E \exists \lambda_x \in \mathbb{R} \quad f(x) = \lambda_x x$ . Si  $x$  et  $y$  sont lin. indépendants,  $f(x+y) = \lambda_{x+y}(x+y) = f(x) + f(y) = \lambda_x x + \lambda_y y$  entraîne  $\lambda_x = \lambda_y = \lambda_{x+y}$ . Si  $k \in \mathbb{R}$ ,  $f(kx) = \lambda_{kx} \cdot kx = k f(x) = k \lambda_x x$  entraîne  $\lambda_{kx} = \lambda_x$ . Ainsi  $\lambda_x$  est indépendant du choix de  $x$  et  $f = \lambda Id$ . CQFD

Si  $f \in \mathcal{O}(E)$  laisse stable chaque droite,  $f$  sera donc une homothétie dont le rapport ne peut être que  $\pm 1$  (car  $\| \lambda Id(x) \| = \| x \| \Rightarrow |\lambda| = 1$ ), ie  $f = \pm Id$ .

**III.1.b**

\* Z? Si  $f \in Z$ ,  $f \sigma_D = \sigma_D f$  pour toute droite  $D = \mathbb{R}x$ , d'où  $f(x) = \sigma_D f(x)$  et  $f(x) \in D$ .  $f$  laissera stable toutes les dtes vectorielles, donc  $f = \pm Id$ .

La réciproque étant évidente :  $Z = \{\pm Id\}$

\* Z<sup>+</sup>? Si  $f \in Z^+$ ,  $f \sigma_F = \sigma_F f$  où  $\dim F = n-2$  (de sorte que  $\sigma_F \in \mathcal{O}^+$ ). Si  $x \in F$ ,  $f(x) = \sigma_F f(x)$  montre que  $f(F) \subset F$  donc  $f(F^\perp) \subset F^\perp$ .

Tout plan  $F^\perp$  de  $E$  est donc stable par  $f$ , donc toute droite de  $E$  est stable par  $f$  (comme intersection de 2 plans) d'où  $f \in \{\pm Id\}$ .

Concluons :

$$\begin{cases} \text{Si } n \text{ pair, } Z^+ = \{\pm Id\} \\ \text{Si } n \text{ impair, } Z^+ = \{Id\} \end{cases}$$



**III.2** Soit  $g \in G \setminus \{\pm \text{Id}\}$ . Si  $g(P) = P$  pour tout plan  $P$ ,  $g(D) = D$  pour toute droite  $D$  (D étant intersection de 2 plans) donc  $g = \pm \text{Id}$ . Absurde. Il existe donc  $P$  tel que  $P \neq g(P)$ .

$$\dim S = \dim(P + g(P)) = \underbrace{\dim P}_2 + \underbrace{\dim g(P)}_2 - \underbrace{\dim P \cap g(P)}_{0 \text{ ou } 1} = \begin{cases} 3 \\ \text{ou} \\ 4 \end{cases}$$

donc  $\dim S^\perp = n-4 \text{ ou } n-3$ .

Si  $n \geq 5$ ,  $\dim S^\perp \geq 1$  donc  $S^\perp \neq \emptyset$

**III.3** On pose  $h = \sigma_{P^\perp}$  et  $k = h g h^{-1} g^{-1}$ .

\*  $k = \sigma_{P^\perp} \circ \underbrace{g \circ \sigma_{P^\perp} \circ g^{-1}}_{\sigma_{g(P^\perp)} \text{ d'après II.1}} = \sigma_{P^\perp} \circ \sigma_{g(P^\perp)}$ . Soit  $k = \sigma_{P^\perp} \circ \sigma_{g(P^\perp)}$

\*  $G \triangleleft O^+$  et  $g \in G$  donc  $\sigma_{P^\perp} g \sigma_{P^\perp}^{-1} \in G$ . De plus  $g^{-1} \in G$  entraîne  $k = \sigma_{P^\perp} g \sigma_{P^\perp} g^{-1} \in G$

\* Comme  $S^\perp = (P + g(P))^\perp = P^\perp \cap g(P)^\perp$ , on aura  $k|_{S^\perp} = \text{Id}_{S^\perp}$

**III.4** Le choix de  $g$  tel que  $g = k(y) \neq \pm y$  est possible car  $k(y) = \pm y$  pour tout  $y \in E$  entraîne que  $k$  conserve les droites de  $E$ , donc  $k = \pm \text{Id}$  (III.1) ce qui est absurde car alors :

$$k = \sigma_{P^\perp} \sigma_{g(P^\perp)} = \pm \text{Id} \Leftrightarrow \sigma_{P^\perp} = \pm \sigma_{g(P^\perp)} \Leftrightarrow \begin{cases} P^\perp = g(P^\perp) \Leftrightarrow P = g(P) \text{ faux} \\ \text{ou} \\ P = g(P^\perp) \text{ absurde car } n \geq 5 \\ (\dim P = 2 \text{ et } \dim g(P^\perp) = n-2) \end{cases}$$

a)  $l \in O(E)$  étant le produit de 2 symétries hyperplanes qui sont dans  $O^-(E)$ , donc  $l \in O^+(E)$ .

On aura bien :  $z = \underbrace{k}_{\in G} (\underbrace{l k^{-1} l^{-1}}_{\in G \text{ car } G \triangleleft O^+}) \in G$

b) \* On a  $k \sigma_{x^\perp} k^{-1} = \sigma_{k(x^\perp)}$  d'après II.1, et  $x \in S^\perp \Rightarrow k(x) = x$  (III.3).

d'où  $\sigma_{k(x^\perp)} = \sigma_{k(x)^\perp} = \sigma_{x^\perp}$ . Ainsi :  $k \circ \sigma_{x^\perp} = \sigma_{x^\perp} \circ k$

\* puis :  $z = k \sigma_{y^\perp} \underbrace{\sigma_{x^\perp} k^{-1} \sigma_{x^\perp}}_{k^{-1}} \sigma_{y^\perp} = \underbrace{k \sigma_{y^\perp} k^{-1}}_{\sigma_{k(y^\perp)} = \sigma_{k(y)^\perp} = \sigma_{z^\perp}} \sigma_{y^\perp} = \sigma_{z^\perp} \sigma_{y^\perp}$

Ainsi  $z = \sigma_{z^\perp} \circ \sigma_{y^\perp}$

**III.5**  $n = \sigma_z + \sigma_y$  donc  $z^\perp \cap y^\perp \subset \text{Ker}(n - \text{Id})$

$z^\perp$  et  $y^\perp$  sont des hyperplans distincts de  $E$  (car  $z^\perp = y^\perp \Rightarrow \mathbb{R}z = \mathbb{R}y \Rightarrow z = k(y) = \pm y$  faux)  
donc  $z^\perp \cap y^\perp$  est de dimension  $n-2$  (car  $\dim z^\perp \cap y^\perp = \dim z^\perp + \dim y^\perp - \dim(z^\perp + y^\perp)$   
 $= (n-1) + (n-1) - n = n-2$ ) et il existera un sev  $V$  de  $E$  de dimension  $n-3$  inclus  
dans  $z^\perp \cap y^\perp$ . On aura  $n|_V = \text{Id}_V$ .

**III.6**  $n \in G$  et  $n|_V = \text{Id}_V$  montre que :

- $V^\perp$  est stable par  $n$
- $n|_{V^\perp} \in \mathcal{O}^+(V^\perp)$

Si  $n|_{V^\perp}$  est un retournement de  $\mathcal{O}^+(V^\perp)$ ,  $n$  sera un retournement de  $\mathcal{O}^+(E)$ .  
Sinon, comme  $\dim V^\perp = 3$ , on peut appliquer II et construire un  
retournement  $h$  de  $V^\perp$  à partir de la rotation  $n|_{V^\perp}$  (II.3 à II.5)

On prolonge ce retournement par l'identité sur  $V$  pour obtenir un  
retournement de  $E$ , qui sera dans  $G$ .

Ccl: Si  $G \neq \{\pm \text{Id}\}$ ,  $G$  contiendra un retournement, donc tous les  
retournements (II.1), donc  $G = \mathcal{O}^+(E)$  (II.2, car les retournements engendrent  
 $\mathcal{O}^+(E)$  d'après I)

**III.7** Si  $G \triangleleft \mathcal{O}^+(E)$ ,  $G = \mathcal{O}^+(E)$  ou  $G \subset \{\pm \text{Id}\}$ .

Les sous-groupes distingués de  $\mathcal{O}^+(E)$  sont donc :

$$\{\text{Id}\}, \quad Z^+ \quad \text{et} \quad \mathcal{O}^+(E)$$

NB : Si  $n$  est impair,  $Z^+ = \{\text{Id}\}$  et  $\mathcal{O}^+(E)$  sera simple.